УНИВЕРЗИТЕТ “СВ. КИРИЛ И МЕТОДИЈ“
ГРАДЕЖЕН ФАКУЛТЕТ-СКОПЈЕ

КАТЕДРА ЗА ХИДРАУЛИКА, ХИДРОЛОГИЈА И УРЕДУВАЊЕ НА ВОДОТЕЦИТЕ

ОСНОВИ НА ХИДРОТЕХНИКА

ДЕЛ 2
ХИДРАУЛИКА

Библиографија

Цветанка Поповска
Механика на флуиди
УКИМ, Градежен факултет, Скопје,
Прво издание 1996, Второ издание 2003
ISBN 9089-43-066-7

Скопје 2013

СОДРЖИНА

1. ФИЗИЧКИ КАРАКТЕРИСТИКИ НА ФЛУИДИТЕ
1.1 Општо
1.2 Основни мерни единици
1.3 Густина
1.4 Стисливост, еластичност
1.5 Вискозитет

2. МИРУВАЊЕ НА ФЛУИДИТЕ
2.1 Притисок
2.2 Основни диференцијални равенки за мирување
2.3 Интегрирање на основните равенки
2.5 Сили од притисок

3. КИНЕМАТИКА НА ФЛУИДИТЕ
3.1 Основни концепти на движењето
3.2 Класификација на движењата
3.3 Равенка на континуитет

4. ДИНАМИКА НА ФЛУИДИТЕ
4.1 Основни принципи
4.2 Енергетска равенка за идеален флуид
4.3 Видови на отпори

5. СТАЦИОНАРНО ТЕЧЕЊЕ ВО СИСТЕМИ ПОД ПРИТИСОК
5.1 Терминологија и задачи
5.2 Кратки цевководи
5.2.1 Локално стеснување
5.2.2 Стеснување со млазница
5.2.4 Коефициент на Chezy
5.3 Долги цевководи
5.3.1 Паралелни цевководи
5.3.2 Пумпи и турбини

6. СТАЦИОНАРНО ТЕЧЕЊЕ ВО ОТВОРЕНИ КОРИТА
6.1 Дефиниција и класификација
6.2 Геометриски елементи на пресек
6.3 Крива на проток
6.4 Сложени попречни пресеци

1 ФИЗИЧКИ КАРАКТЕРИСТИКИ НА ФЛУИДИТЕ

1.1 Општо

Материјата се појавува во две состојби, цврста и флуидна. Флуидите вообичаено се наоѓаат во течна или гасовита состојба. Генерално, состојбата на материјата зависи од слободата на движење на молекулите која е најголема кај гасовите, помала кај течностите и многу мала кај цврстите материи. Со други зборови, меѓумолекуларните кохезиони сили се големи кај цврстата материја, помали кај течностите и многу мали кај гасовите. Ваквите констатации покажуваат некои многу важни својства од практичен аспект, а тие се: компактност и крутост на формата кај цврстата материја, можност за слободно движење на течностите со слободна површина и определен волумен, додека гасовите го исполнуваат целосно просторот каде што се наоѓаат. Флуидната состојба во механиката се нарекува уште и континиум.

Дефиницијата на состојбите на материјата е можна и преку нејзиното однесување при дејство на различни напрегања, односно сили. Апликацијата на напрегање од притисок или затегање, кај цврстата материја резултира најпрвин со еластична деформација, а подоцна, кога напрегањата ќе ги надминат еластичните гранични напрегања, настапува состојба на трајна деформација или лом. Ваквите напрегања кај флуидите доведуваат до континуирани деформации и нивната неспособност да се спротивстават на истите им ја дава основната карактеристика да ја менуваат формата или да течат.

Состојбата на деформации кај флуидите, течностите и гасовите, може да се разбере и со познавање на нивните физички својства. Течностите се нерастегливи и нестисливи, а гасовите се растегливи и стисливи. Течностите немаат сопствена форма и нивниот волумен останува константен при завземање на формата на садот во кој се наоѓаат. Со други зборови, течностите имаат сопствен волумен и променлива форма. Гасовите немаат сопствена форма ниту волумен. Тие ја завземаат формата на садот во кој се наоѓаат и целосно го исполнуваат. Ако е садот поголем, гасот се шири, а ако е помал се собира.

Механиката на флуидите го изучува однесувањето на флуидите во состојба на мирување и во движење. Некои од нивните физички карактеристики при фундирањето на основите принципи имале многу големо влијание, некои помало, а други немале речиси никакво влијание. На пример, во состојба на мирување тежината игра важна улога, додека во состојба на течење густината и вискозноста имаат доминантно влијание.

1.2 Основни мерни единици

Во меѓународниот систем на мерки (**International Unit System - SI**) основни единици се: маса (M), должина (L) и време (T). Сите други мерки се изведени од овие три основни, при што се користи законот на Newton[1] дека силата е производ од масата и забрзувањето (F=M·a), па следува [$1N=1kgm/s^2$]. Извршената работа од сила на единица должина е енергија и се изразува со џул [1J=1Nm], а снагата се изразува со ват [1W=1Nm/s]. Влијанието на сила на единечна површина е напрегање и се изразува во паскали [$1Pa=1N/m^2$]. За изразување на поголеми и помали мерни единици се користат префикси прикажани во Додатокот А, Табела А-1.

Табела 1.1 Основни и изведени мерни единици

Карактеристична големина	Мерка	Маса-Должина-Време M - L - T
ОСНОВНИ		
маса	kg	M
должина	m	L
време	s	T
ИЗВЕДЕНИ		
површина	m^2	L^2
волумен	m^3	L^3
статички момент	m^3	L^3
инерцијален момент	m^4	L^4
брзина	m/s	LT^{-1}
забрзување	m/s^2	LT^{-2}
протек на волумен	m^3/s	L^3T^{-1}
протек на маса	kg/s	MT^{-1}
аглова брзина	rad/s	$rad \cdot T^{-1}$
аглово забрзување	rad/s^2	$rad \cdot T^{-2}$
фреквенција, зачестеност	1/s=Hz (херц)	T^{-1}
сила	kgm/s^2=N (њутн)	MLT^{-2}
момент на сила, енергија	kgm^2/s^2=Nm=J (џул)	ML^2T^{-2}
импулс на сила, количество на движење	kgm/s=Ns	MLT^{-1}
момент на количество на движење	kgm^2/s=Nms	ML^2T^{-1}
снага	kgm^2/s^3=Nm/s=W (ват)	ML^2T^{-3}
напрегање	$kg/ms^2=N/m^2$=Pa (паскал)	$ML^{-1}T^{-2}$
густина	kg/m^3	ML^{-3}
специфична тежина	$kg/m^2s^2=N/m^3$	$ML^{-2}T^{-2}$
динамичка вискозност	$kg/ms=Ns/m^2$=Pa s	$ML^{-1}T^{-1}$
кинематичка вискозност	m^2/s	L^2T^{-1}
температура	K	K
температурен градиент	K/m	KL^{-1}
ентропија, термички капацитет	$kgm^2/s^2/K$=J/K	$ML^2T^{-2}K^{-1}$
количество топлина	m^2/s^2K=J/kgK	$K^{-1}L^2T^{-2}$

1.3 Густина

Содржината на маса од некоја материја во единица волумен е густина. Ваквата дефиниција ја покажува зависноста на густината од бројот на молекулите. Активноста на молекулите во просторот се зголемува со температурата, па од тука следува дека густината се намалува со зголемување на температурата.

$$\rho = \frac{M}{\forall} \qquad [1.1]$$

каде (ρ) е густина во [kg/m^3]. Реципрочната вредност на густината е специфичен волумен и се изразува во [m^3/kg]. Густината на гасовите се определува:

$$\rho = \frac{p}{RT} \qquad [1.2]$$

каде (p) е апсолутен притисок во [Pa], (R) е гасова константа во [J/kgK], а (T) е апсолутна температура во Kelvin степени (K=273+^{o}C). Големината (R) е

константна само ако е гасот совршен, односно идеален. За практични цели може да се користи принципот за пропорционално однесување на густината и масата што се добива преку односот на гасовите константи.
Освен густината, во инженерството често се користи и поимот релативна густина што претставува однос на содржината на две различни маси во еднаков волумен. Вообичаено е цврстите материи и течностите да се споредуваат со водата чија густина е (ρ=1000 kg/m^3) при температура од 4^{o}C, а гасовите со водород при температура од 0^{O}C и притисок од 10^{5}Pa. Така, релативната густина на водата е 1, на маслото ($\rho_{масло}/\rho_{вода}$=750/1000=0,75), а на живата ($\rho_{жива}/\rho_{вода}$ =13570/1000 = 13,57). Ако масата се изрази во тежина како сила, тогаш нејзината содржина во единица волумен ја определува специфичната тежина:

$$\gamma = \frac{F_g}{\forall} = \frac{M \cdot g}{\forall} = \frac{\rho \cdot \forall \cdot g}{\forall} = \rho g \qquad [1.3]$$

каде (g) е забрзување од земјината гравитација (g = 9,81 m/s²). Специфичната тежина (γ) се изразува во [kg/m^3][m/s^2]=[kgm/m^{3}s^2]=[N/m^3] и за вода при температура од 4^{o}C изнесува (γ=1000·9,81=9810 N/m^3). Имајќи во предвид дека забрзувањето од земјината гравитација е константна големина, следува дека специфичната тежина, како и густината, зависи од температурата и од притисокот.

1.4 Стисливост, еластичност

Флуидите под дејство на силите од притисокот го менуваат волуменот, или со други зборови се однесуваат стисливо, одосно еластично. Модулот на стисливост/еластичност се определува како однос на елементарната промена на притисокот (dp) и релативната промена на волуменот ($d\forall/\forall_1$) и има иста димензија како и притисокот:

$$K = -\frac{dp}{d\forall/\forall_1} \qquad [1.4]$$

Знакот минус покажува дека за намалување на притисокот одговара зголемување на волуменот и обратно. Ако наместо волуменот ($\forall$) се воведе густината (ρ), од изразот за масата ($M = \rho\forall = const$), со чие диференцирање се добива ($dM = \rho d\forall + \forall d\rho$), за модулот на стисливост следува:

$$K = -\frac{dp}{d\rho/\rho} \qquad [1.5]$$

Стисливоста на гасовите е извонредно голема, а на течностите е многу мала. Затоа, во техниката често се користи терминот стисливи флуиди за гасовите и нестисливи за течностите. Течностите се третираат како стисливи само во исклучителни случаи, на пример, при проучување на хидрауличкиот удар. Во врска со ова многу е важно кога и во колкава мерка може да се претпостави нестисливоста на некој флуид. Одговор на ова прашање дава Newton-овата равенка:

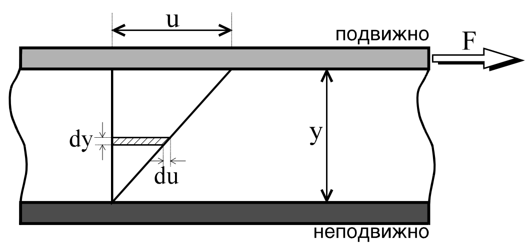
$$a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} = \sqrt{\frac{K}{\rho}} \qquad [1.6]$$

каде (*a*) е брзина на пренесување на звукот низ хомогени средини. Секоја промена на притисокот во флуидната средина се пренесува со оваа брзина која уште се вика и брзина на пропагација на бран од притисок, или сонична брзина. Претпоставката за нестислив флуид има исто значење како и претпоставката за бесконечно голема брзина (*a*), односно секоја промена на притисокот во една точка моментно би се пренела во сите други точки на флуидното поле. Практично, стисливоста на течностите може да се занемари секојпат кога е брзината на пренесување на звукот голема, а струјниот простор мал. Стисливоста не смее да се занемарува кога брзината на струење ја достигнува или пак ја надминува брзината (a). Течностите не можат да постигнат таква брзина на струење, но гасовите можат. Денес низ воздухот се извршуваат движења со брзина неколку пати поголема од брзината со која низ воздухот се пренесува звукот (a=335m/s во воздух, a=1440m/s во вода). Ако гасот се движи со брзина многу помала од брзината на звукот, неговата стисливост може да се занемари и струењето да се проучува како да е во прашање течност. Во практичното инженерство корисен критериум при одлучувањето кога некој флуид може да се третира како нестислив е Mach-овиот број (M_a), кој се добива како однос на брзината на движење и брзината на звукот ($M_a=V/a$). Ако е ($M_a<1$) движењето е субсонично, а ако е ($M_a>1$) движењето е суперсонично. Флуидот може да се третира како нестислив кога е модулот на стисливост-еластичност ($K=\infty$), односно кога брзината ($a=\infty$), па следува дека тогаш ($M_a=0$). Стисливоста може без последици да се занемари за ($M_a\leq 0,3$).

1.5 Вискозитет

При движењето на флуидите постои взаемно дејство на меѓу-молекуларните сили на честичките на флуидот и на цврстите граници на средината каде се извршува движењето. Флуидните честички лепејќи се за цврстите површини ја губат сопствената брзина. Ова својство на флуидите се објаснува со вискозитет.

Нека се разгледува флуид што исполнува простор помеѓу две цврсти граници, Сл. 1.1. Кога горната плоча почнува да се движи под влијание на силата (F), горните слоеви на флуидот близу контактот се движат со брзина (u), а во долниот дел при неподвижната плоча брзината е нула.



Слика 1.1 Флуид меѓу две цврсти плочи

Ако растојанието (y) и брзината (u) се мали, тогаш промената на брзината во вертикална насока, односно градиентот на брзината (du/dy) е права линија. Ваквото движење во слоеви со линеарен градиент на брзината е ламинарно и напрегањата при контактот на флуидот и подвижната плоча се определуваат со изразот:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \quad \text{или} \quad \mu = \frac{\tau}{du/dy} \qquad [1.7]$$

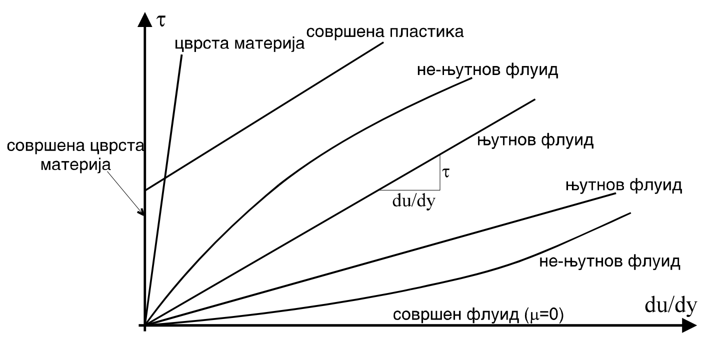
каде напрегањето (τ) се изразува во [Pa] и зависи од силата (F) и површината (A), односно (τ=F/A), а (μ) е апсолутна или динамичка вискозност на флуидот. Димензијата на (μ) е [N/m^2]/[m/s]/[m]=[Pa·s]. Се користи и помала единица од [Pa·s], (poise=10^{-1}Pa·s). Сите флуиди кои се однесуваат согласно на равенката 1.9 се њутнови флуиди (μ=const), Сл.1.2. Односот на динамичката вискозност и густината ја определува кинематската вискозност:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \qquad [1.8]$$

Димензијата на кинематската вискозност (ν) е [Pa·s]/[kg/m^3]= [m^2/s]. Често се употребува и помалата единица (stokes=10^{-4} m^2/s). Флуидите кои немаат линеарен градиент на брзината се не-њутнови ($\mu \neq$const) и тогаш напрегањата се определуваат:

$$\tau = k\left(\frac{du}{dy}\right)^n \quad \text{или} \quad \mu = k\left(\frac{du}{dy}\right)^{n-1} \qquad [1.9]$$

каде (k) е коефициент на пропорционалност, (n) е експонент и (n>1) за флуиди со големо внатрешно триење, а (n<1) за флуиди со мало внатрешно триење. Не-њутнови флуиди се: растворите, суспензиите, боите, крвта, пластичните маси, медот и други. Флуидите кои немаат вискозитет (μ=0) се совршени и неви-скозни, а такви во природата не постојат. Претпоставката за невискозност само помага при воспоставувањето на одредени теоретски концепти при движењето на реалните, вискозни флуиди. При движењето на реалните флуиди се создаваат отпори заради тенгенцијалните напрегања на границите и во внатрешноста на струјното поле, кои зависат од вискозитетот, кој пак зависи од видот на флуидот, неговата топлотна состојба и од притисокот на кој е изложен.



Слика 1.2 Њутнови и нењутнови флуиди

Притисокот не влијае многу врз динамичката вискозност (μ), меѓутоа има извонредно големо влијание врз кинематската вискозност ($\nu=\mu/\rho$), затоа што густината (ρ) е функција од притисокот (p). Кај течностите вискозноста незначително се менува се додека се притисоците мали, меѓутоа над одредена граница влијанието на притисокот нагло се зголемува. Температурата има исто така големо влијание. Вискозитетот на течностите се намалува ако температурата расте и обратно. Кај гасовите вискозитетот се зголемува кога температурата расте.

2 МИРУВАЊЕ НА ФЛУИДИТЕ

2.1 Притисок

Генерално врз флуидите делуваат волуменските, површинските и инерцијалните сили. Волуменските сили се резултат на тежината, односно густината на флуидната маса и се определуваат согласно на Нењтон-овиот закон, односно како производ на елементарната маса и забрзувањето од гравита-цијата:

$$dF = dM \cdot g = \rho d\forall \cdot g \qquad [2.1]$$

делуваат сили што го заменуваат отсечениот дел и тоа во сите точки на за-едничката површина (A). Затоа, овие сили се викаат површински сили. Елемен-тарната површина (dA) прима елементарна сила (dP) која може да се разложи на нормална (dN) и тангенцијална (dT) компонента. Кога површината е многу мала ($dA \to 0$), тогаш односот (dN/dA) претставува нормално напрегање, а односот (dT/dA) е тангенцијално напрегање. Во внатрешноста на флуидот нормалното напрегање може да биде само притисокот (p), а елементарната сила од притисокот се определува:

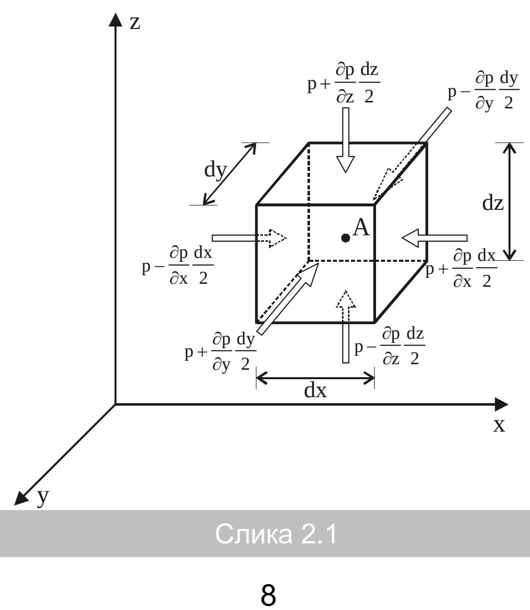
$$dP = p \cdot dA \qquad [2.2]$$

Притисокот е сила што делува на единица површина и се изразува во [N/m^2]=[Pa]. Во флуидот постои притисок и во состојба на мирување и во состојба на движење. Оној при мирување се вика статички притисок и има две основни својства: (i) секојпат е нормален на површината и (ii) има иста вредност во една точка без разлика каква е површината. Првото својство е очигледно, бидејќи кога силата од притисокот би била под некој агол во однос на нормалата на површината таа може да се разложи на компонента во правец на нормалата и компонента во тангентната рамнина која би предизвикала лизгање на флуидните честички и рамнотежата би била нарушена. Од тука следува дека тангенцијалните напрегања во состојба на мирување се во меѓусебна рамнотежа и флуидот се однесува како да е совршен. При движење на флуидите хипотезата за совршен флуид не е прифатлива, освен во случај кога вискозитетот е многу мал.

Во практичните проблеми често површинските сили се именуваат како сили од притисок. Во меѓународниот систем за мерки (*System International-SI*) како единица за притисок се користи бар, ($1bar=100.000Pa=10^5Pa$) и милибар, ($1mbar=100Pa=10^2Pa$). Многу често притисокот се изразува и со височина на живин столб. На пример, атмосферскиот притисок на морската површина е нормален атмосферски притисок и е еднаков на 760mmHg или $101.325Pa \cong 101kPa$.

2.2 Основни диференцијални равенки за мирување

Основните диференцијални равенки за мирување на флуидите се изведуваат разгледувајќи еден флуиден елемент со бескрајно мали димензии (dx), (dy), (dz) и воспоставувајќи статичка рамнотежа на површинските и волуменските сили, Сл. 2.1. Означувајќи го притисокот во централната точка А со (p), тогаш на границите на елементот притисоците можат да се изразат со елементарните промени заради промената на растојанието, а при тоа силите од притисокот се определуваат како производ на притисокот и површината, равенка 2.2.



Слика 2.1

За насоката (x) силите од притисокот на страниците се:

$$\left(p-\frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)dydz \quad \text{и} \quad \left(p+\frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)dydz \qquad [2.3]$$

Површинските сили во состојба на мирување се во рамнотежа со волуменските сили кои се определуваат согласно Newton- овиот закон како производ на масата и забрзувањето. Волуменот на елементарниот флуиден елемент е определен со ($d\forall=dxdydz$), а неговата маса е ($\rho\cdot d\forall$) и ако забрзувањата во трите насоки на координатниот систем (x-y-z) се означат со (X), (Y) и (Z), рамнотежата на силите во насока (x) се изразува:

$$\left(p+\frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)dydz-\left(p-\frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)dydz+\rho\cdot dxdydz\cdot X=0 \qquad [2.4]$$

Вакви равенки можат да се напишат аналогно и за насоките (y) и (z). Секој член во тие равенки множи со елементарниот волумен ($d\forall$) и по делење со истиот се добива:

$$\boxed{\begin{aligned} X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}&=0\\ Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}&=0\\ Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}&=0 \end{aligned}} \qquad [2.5]$$

Овие равенки се познати како Euler[2]-ови равенки за мирување на флуидите каде ($\partial p/\partial x$), ($\partial p/\partial y$) и ($\partial p/\partial z$) се елементарни (парцијални) промени на притисокот и се викаат градиенти на притисокот.

2.3 Интегрирање на основните равенки

За да можат Euler-овите равенки да се интегрираат потребно е системот равенки 2.5 да се замени со една единствена равенка која нема парцијални изводи на притисокот. Ова се постигнува кога првата равенка се множи со (dx), втората со (dy), третата со (dz) и потоа се собираат:

$$\left(Xdx+Ydy+Zdz\right)=\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}dx+\frac{\partial p}{\partial y}dy+\frac{\partial p}{\partial z}dz\right) \qquad [2.6]$$

Збирот на парцијалните изводи од десната страна всушност претставува вкупна промена на притисокот (dp), затоа што притисокот е функција од положбата во просторот p=p(x,y,z), па за последната равенка се пишува:

$$Xdx+Ydy+Zdz=\frac{1}{\rho}dp \qquad [2.7]$$

Кога флуидот е изложен само под дејство на гравитацијата, тогаш забрзувањата се (X=0), (Y=0) и (Z= –g), каде знакот минус покажува дека гравитацијата делува обратно од избраната позитивна насока (z) и равенката 2.7 добива форма:

$$dp=-\rho gdz \qquad [2.8]$$

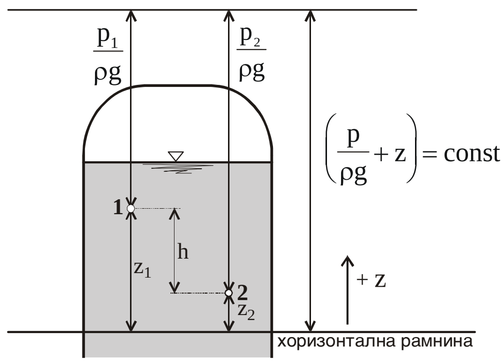
Во оваа равенка гравитацијата е конзервативна сила па густината исклучиво е функцја од притисокот. Затоа, равенките (z=const) претставуваат хоризонтални рамнини на еднаков притисок и еднаква густина. За две точки во флуидот со различни висински положби интегралот на равенката 2.8 изнесува:

$$\int_{p_1}^{p_2} dp = -\rho g \int_{z_1}^{z_2} dz \qquad [2.9]$$

или по интегрирање:

$$p_2 - p_1 = \rho g (z_1 - z_2) = \rho g h \qquad [2.10]$$

Оваа равенка покажува дека притисокот се зголемува со зголемување на длабочината во флуид со константна густина (ρ=const). Ако се изрази притисокот со височина, тогаш збирот на пиезометриската височина (p/ρg) и геодетската височина (z) е константен за било која точка во флуидот, Сл. 2.3.



Слика 2.2

$$\frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + z_2 = \text{const} \qquad [2.11]$$

Кога точката 1 е на слободната површина од некоја течност, тогаш притосокот ($p=p_o$) е надворешен притисок, а производот (ρgh) е релативен притисок од течноста, па вкупниот притисок во точката 2 која се наоѓа на длабочина (h) од слободната површина, се определува со изразот:

$$p = p_o + \rho g h \qquad [2.12]$$

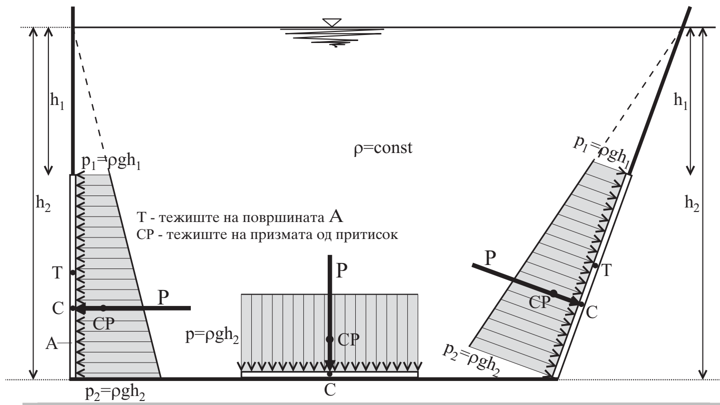
Ако надворешниот притисок е атмосферски ($p=p_{at}$), тогаш точките под слободната површина се изложени само на релативниот притисок од течноста (p=ρgh), бидејќи атмосферскиот притисок делува од сите страни на течноста. За флуид со променлива густина (ρ≠const), односно за стисливи флуиди како што се гасовите, интегрирањето на основната равенка за мирување не е можно ако не се познава зависноста помеѓу притисокот и густината. Овој проблем го изучуваат други технички дисциплини, на пример океанографијата и метеорологијата, кога најчесто експериментално се доаѓа до соодветни емпириски зависности помеѓу притисокот и густината и тоа во изотермички или изентропски услови.

2.5 Сили од притисок

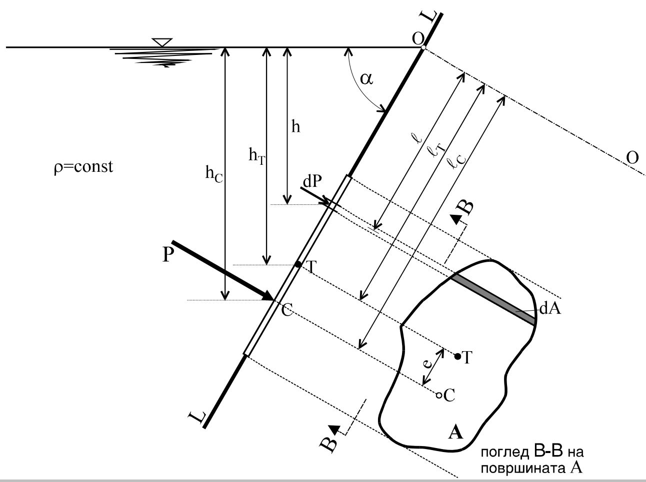
Притисокот што го примаат површините на средината исполнета со течност, всушност определува и соодветна сила со интензитет, правец и нападна точка. Оваа сила и местоположбата каде истата се предава на соодветните површини има есенцијално значење при проектирање на браните, резервоарите, затворачите, пловните и други објекти.

Рамни површини. Кај рамните површини во течност со константна густина, Сл. 2.3, притисокот се менува линеарно со длабочината, равенка 2.10. Засенчените површини се всушност дијаграми на притисокот или призми на притисокот.

Силата од притисокот го определу-ва волуменот на призмата и поминува низ нејзиното тежиште кое уште се вика и центар на притисокот CP. Тежиштето на површината за која се определува притисокот (точката T) не се поклопува со местото каде резултатнтната сила од притисокот ја допира истата (точката C). Интензитетот, правецот и место-то каде оваа сила се предава врз површината се определува генерално за произволна површина (A) во навалената рамнина L-L, Сл.2.8. Тежиштето на оваа површина е вертикалното ра-стојание (h_T) од слободната површина на течноста и на растојание (λ_T) во однос на пресечната оска O-O.



Слика 2.3



Слика 2.4

Елементарната сила од притисокот (dP) на елементарната површина (dA) се определува со ($dP=p\cdot dA=\rho g\cdot h\cdot dA$), каде ($h = \theta \cdot \sin\alpha$), па следува:

$$dP = \rho g \cdot h \cdot dA \cdot \sin\alpha \qquad [2.13]$$

Со интегрирање на оваа равенка по целата површина (A), се определува резултантната сила од притисокот:

$$P = \rho g \cdot \sin\alpha \cdot \int_A h \cdot dA \qquad [2.14]$$

каде ($\int \ell \cdot dA$) е статички момент на површината (A) во однос на оската O-O и го определува производот на тежишното растојание (ℓ_T) и површината (A):

$$P = \rho g \cdot A \cdot \ell_T \sin\alpha \qquad [2.15]$$

Растојанието ($\ell_T \sin\alpha = h_T$) е вертикално растојание до тежи-штето на површината (А), па последната равенка се пишува:

$$\boxed{P = \rho g \cdot h_T \cdot A} \qquad [2.16]$$

Правецот на оваа сила е нормален на површината. Нападната точка се определува со моментот на елементарната сила во однос на оската О-О:

$$dM = dP \cdot \ell = \rho g \cdot \ell^2 \cdot dA \sin\alpha \qquad [2.17]$$

или по интегрирање:

$$M = \rho g \cdot \sin\alpha \int_A \ell^2 dA \qquad [2.18]$$

каде ($\int \ell^2 dA$) е момент на инерција на површината (А) во однос на оската О-О:

$$M = \rho g \cdot I_{O-O} \cdot \sin\alpha \qquad [2.19]$$

Овој момент определен со резултантната сила од притисокот изнесува ($M = P \cdot \ell_C$) или ($P \cdot \ell_C = \rho g \cdot I_{O-O} \cdot \sin\alpha$), од каде се определува растојанието (ℓ_C):

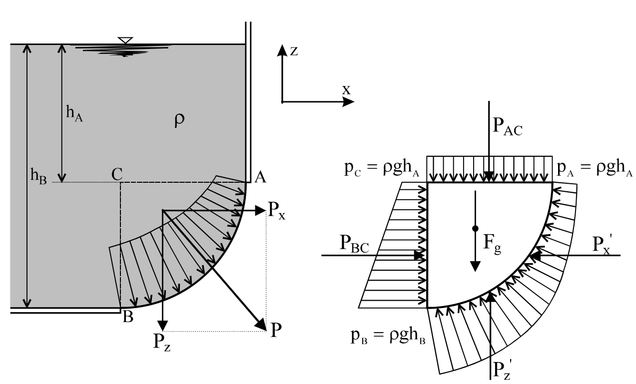
$$\ell_C = \frac{M}{P} = \frac{\rho g \cdot I_{O-O} \cdot \sin\alpha}{\rho g \cdot A \cdot \ell_T \cdot \sin\alpha} = \frac{I_{O-O}}{A \cdot \ell_T} \qquad [2.20]$$

Ако моментот на инерција на површината (А) се изрази во однос на сопствените оски на симетрија на површината ($I_{O-O} = I_T + \ell_T{}^2 A$) и се замени во последната равенка, се добива ексцентрицитетот помеѓу тежиштето на површината и нападната точка на резултантната сила:

$$e = \ell_C - \ell_T = \frac{I_T}{A \cdot \ell_T} \text{ или } h_C = h_T + \frac{I_T}{A \cdot h_T} \qquad [2.21]$$

Оваа равенка секојпат индицира положба на центарот на притисокот С под тежиштето Т на површината (А), освен за хоризонтални површини, Сл. 2.5. Преглед на тежишните растојанија и моментите на инерција за најчесто употребувани геометриски форми во практичното инженерство е даден во Додатокот Б.

Криви површини. Силите од притисокот на кривите површини не можат да се определуваат како кај рамните површини, затоа што распоредот на притисокот не е линеарен, туку радијален и нормален на тангентата во секоја точка од кривата површина, Сл. 2.9, па разложувањето на резултантната сила на хоризонтална и вертикална компонента е неизбежно.



Слика 2.5

Ако кривата површина АВ се разгледува како слободен волумен ($\forall_{ABC}$) со тежина (F_g), тогаш, за статичка рамнотежа на компоненталните сили може да се напише:

$$\sum F_x = P_{BC} - P_x^{'} = 0 \quad и \quad \sum F_z = P_z^{'} - F_g - P_{AC} \qquad [2.26]$$

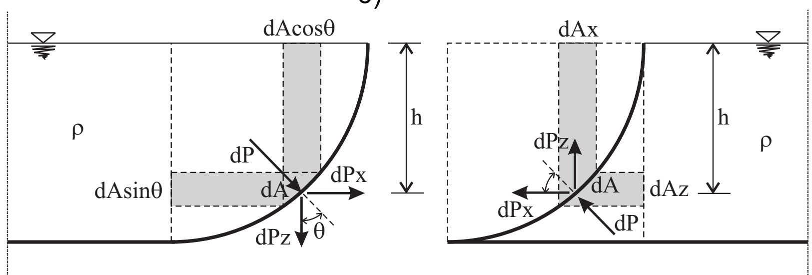
каде ($P_x' = P_{BC}$), ($P_z' = P_{AC} + F_g$) и ($F_g = \rho g \cdot \forall_{ABC}$). Силите од притисокот на површините AC и BC се определуваат како сили на рамни површини при што очигледно е дека површините AC и BC се проектирани површини на кривата површина AB во хоризонтална и вертикална рамнина. За елементарната површина (dA), Сл.2.6, проекците на елементарната сила од притисокот се:

$$dP_x = dP \cdot \sin\theta = \rho g \cdot h \cdot dA \cdot \sin\theta \qquad [2.27]$$

$$dP_z = dP \cdot \cos\theta = \rho g \cdot h \cdot dA \cdot \cos\theta \qquad [2.28]$$

каде ($dA \cdot \sin\theta = dA_z$) и ($dA \cdot \cos\theta = dA_x$) се елементарни проектирани површини.

а) б)



Слика 2.6

Елементарните сили од притисокот се изразуваат преку елементарните проектирани површини:

$$dP_x = \rho g \cdot h \cdot dA_z \qquad [2.29]$$

$$dP_z = \rho g \cdot h \cdot dA_x \qquad [2.30]$$

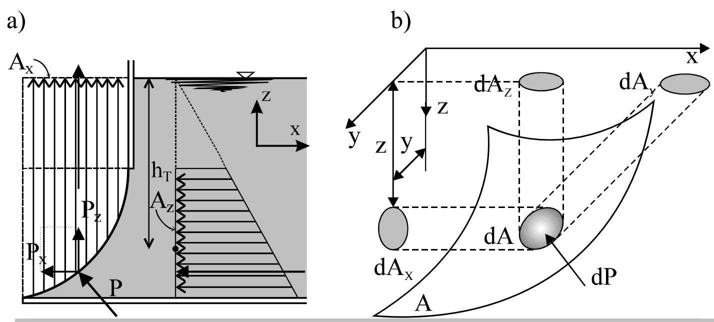
или по интегрирање следува:

$$P_x = \rho g \int_{A_z} h \cdot dA_z = \rho g \cdot h_T \cdot A_z \qquad [2.31]$$

$$P_z = \rho g \int_{A_x} h \cdot dA_x = \rho g \cdot \forall \qquad [2.32]$$

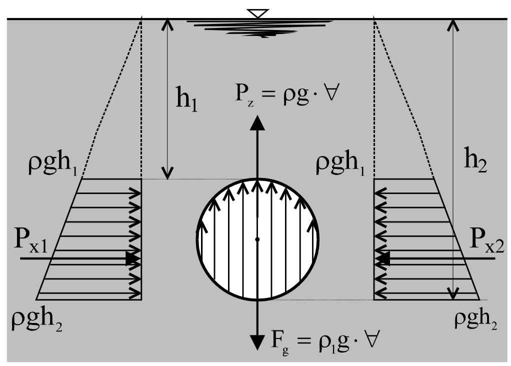
Последните равенки ја изразуваат силата од притисокот во хоризонтална насока како производ на специфичната тежина на течноста ($\gamma = \rho g$), проектираната површина во вертикална рамнина (A_Z) и нејзиното тежиште од слободната водна површина (h_T), а вертикалната сила е определена како производ на специфичната тежина ($\gamma = \rho g$) и волуменот на течноста ($\forall$) кој почнувајќи од слободната површина на течноста ја притиска површината AB надолу, *Сл 2.6а*. Резултантната сила се определува ($P = \sqrt{P_x^2 + P_z^2}$). Вертикалната сила од притисокот може да делува и обратно, во зависност од правецот на закривеноста и нејзиниот контакт со течноста, кога истата ја притиска површината AB кон слободната површина, односно делува нагоре, Сл. 2.6б.

Ваквата сила е сила од потисок и често се вика Архимедова сила, бидејќи Архимед прв дошол до сознанието дека секое тело потопено во течност губи привидно од својата тежина онолку колку што тежи истиснатата течност.



Слика 2.7

Површините, односно телата кои се од сите страни потопени во течност, Сл. 2.8, се изложени само на влијание од силата на потисокот (P_Z), на која и се спротивставува само силата од сопствената тежина (F_g). Кога е (F_g>P_Z) телото тоне, кога (F_g=P_Z) телото испливува на површината и кога (F_g<P_Z) телото лебди на површината. Хоризоталните компоненти од притисокот кај потопените тела се во взаемна рамнотежа ($\Sigma P_x=0$).



Слика 2.8